Landesabitur Hessen 2023

Merksätze und Übungsaufgaben (nach dem hessischen Abiturerlass für 2023)
Zusammengestellt und bearbeitet von Bernd Schneider, PDR Kelkheim.

Q1) Analysis

Q 1.1 Einführung in die Integralrechnung

Merksatz: Wird bei der Ableitung einer Funktion die momentane ÄNDERUNG einer Größe beschrieben, so stellt das **Aufleiten** (Integrieren) einer Funktion den umgekehrten Weg dar, also gilt für die Stammfunktion F\`(x) = f(x)

z.B. f(x) = sin (x), dann ist $F(x) = \int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$ (C ist ein Anfangswert)
denn F\`(x) = sin (x)

→ Wie finde ich Stammfunktionen?

1	Stammfunktionen elementarer Funktionen findet man in einer **Formelsammlung** z.B. $f(x) = x^{-1} \rightarrow F(x) = \ln\lvert x\rvert$
2	Bei **Summen/ Differenzen** integriert man jeden Summanden einzeln! Zahlen oder Variablen, die NICHT Funktionsvariable sind, kann man vor das Integralzeichen setzen. z.B. $f(x) = \sin(x) + 2e^{3x} - x^3 \rightarrow F(x) = \int \sin(x)dx + 2\int e^{3x}dx - \int x^3\,dx$
3	**Lineare Substitution** Ist innerhalb einer Funktion eine lineare Funktion [y = mx + b] enthalten, so leite die Funktion folgendermaßen auf: $h(x) = f(mx + b) \rightarrow H(x) = \frac{1}{m} F(mx + b) + C$ --- z.B.: $f(x) = \cos(2x - \pi) \rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \sin(2x - \pi) + C$ $g(t) = e^{0,4t-2} \rightarrow G(t) = \frac{1}{0,4} e^{0,4t-2} + C$

Übungsaufgaben: Finde eine Stammfunktion zu

i) $f(x) = x^{-3} + 3x^2 - 1$

ii) $g(x) = -\cos(x) + 5\sin(x)$

iii) $y(t) = 20\cos(0,1t - \pi) + 0,7$

iv) $h(x) = \cos(3x - 1) + e^{-0,1x+2} - 5$

v) Finde $F(x)$ zur Kurvenschar
$f_a(t) = a\sin(at - 1) + \sin(t)$

4 **<u>Partielle Integration</u>**
(Produktregel rückwärts)

$$\text{Wenn } (u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$\text{dann gilt } u \cdot v = \int u'v + \int uv' \iff \int uv' = uv - \int u'v$$

---

z.B. $F(x) = \int 2x \cdot \sin(x)\,dx$

mit u = 2x und v' = sin (x) , dann ist u' = 2 und v = – cos (x)
und so gilt: $F(x) = \int 2x \cdot \sin(x)\,dx = -2x\cos(x) - \int -2\cos(x)\,dx$

$$= -2x\cos(x) + 2\int \cos(x)dx = -2x\cos(x) + 2\sin(x)$$

5 **<u>Integration durch Substitution</u>**
(Kettenregel rückwärts). Man kann diese Regel anwenden, wenn eine innere Funktion noch einmal als Ableitung auftaucht.

$$F(x) = \int_a^b f(g) \cdot g'\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)\,dz \text{ mit } z = g(x)$$

---

z.B. f (x) = sin (2x² – 1) · 4x ; dann gilt $F(x) = \int \sin(2x^2 - 1) \cdot 4x\,dx$ *substituiere* $z = 2x^2 - 1$

So ist z' = $\frac{dz}{dx}$ = 4x und damit dx = $\frac{dz}{4x}$, also $F(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} \sin(z) \cdot 4x \cdot \frac{dz}{4x} = \int_{g(a)}^{g(b)} \sin(z)\,dz$

<u>Übungsaufgaben</u>: Berechne die bestimmten Integrale im Intervall I = [2 ; 4]

i) f(x) = x cos (2x) ii) g(t) = 0,5t e^{2t-1} iii) $h(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

<u>Q1.2 Anwendungen der Integralrechnung</u>

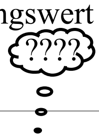
<u>Merksatz</u>: Die Integralrechnung findet in vielen Bereichen Anwendung.
Z.B.: wenn man die **Zuordnung Zeit [t] → Geschwindigkeit [v]** in einem Zeit - Intervall [t_0 ; t_1] integriert, erhält man die in dieser Zeit zurückgelegte Strecke.

<u>z.B.:</u> Die Geschwindigkeit eines bremsenden Fahrzeuges kann als Funktion $f(t) = 50\,e^{-0{,}1t}$ beschrieben werden. Hierbei gilt: t [s] → f(t) [m/s].
→ Wie viele Meter wurden in den ersten 40 sek zurückgelegt?
<u>Lösung:</u>

$$F(t) = \int_0^{40} 50\,e^{-0{,}1t}dt = [-500e^{-0{,}1t}]_0^{40} = -500\,e^{-0{,}1 \cdot 40} + 500 \approx 491$$

A: Es wurden 491 m zurückgelegt.

<u>Merksatz</u>: Ist eine Funktion gegeben, die eine **<u>Änderungsrate</u>** beschreibt, so beschreibt die Stammfunktion die **<u>Ausgangsfunktion</u>**, also beschreibt etwa eine Funktion f die Änderung einer Größe (z.B. Unfälle), dann beschreibt die Stammfunktion F die Anzahl der Unfälle. Hier muss der Anfangswert C gegeben sein: F(x) = ….. + C



Ob du das verstanden hast, zeigt die folgende Übungsaufgabe →

Das bestimmte Integral

Merksatz: Das bestimmte Integral kann man als FLÄCHENINHALT der Fläche unter einer Kurve deuten: $\int \sin(x)\,dx$

Länge · **Breite**

Die **Summe** der Rechtecke unter einer Kurve mit „unendlich kleiner" Breite.

→ Man berechnet den Wert eines bestimmten Integrals so:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

→ Liegt die Fläche (ganz oder teilweise) unterhalb der x – Achse, so müssen die Flächen gesondert berechnet (Nullstellen!) und zuletzt addiert werden.

Also $A = -\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

Liegt ein Flächeninhalt **zwischen den Graphen** zweier Funktionen, so gilt für f(x) ≥ g(x)

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Übungsaufgabe:

Die Funktion $f(t) = e^{0,4t-5} + 4$ gibt die Wachstumsrate der Unfälle an Silvester an, $0 \leq t \leq 24$.
Zu Beginn (t = 0) wurden 10 Unfälle registriert.
a) Wie viele Verkehrsunfälle passieren in den ersten 18 Stunden?
b) Wenn die Unfälle um mehr als 50 steigen, führt die Verkehrswacht verstärkt Kontrollen durch. Wann ist dies der Fall?