Landesabitur Hessen 2024

Merksätze und Übungsaufgaben (nach dem hessischen Abiturerlass für 2024)
Zusammengestellt und bearbeitet von Bernd Schneider, PDR Kelkheim.

Q 2) Lineare Algebra

Q 2.4 Vertiefung der Linearen Algebra
A) Grundlagen

Merksatz: Wie bereits beschrieben sind Matrizen im Grunde Tabellen mit Zeilen, Spalten und Zellen, in die man Zahlen oder Funktionen eintragen kann.
Matrizen bezeichnet man in der Regel mit Großbuchstaben, der Index gibt die Anzahl von Zeilen und Spalten an: A_{mxn} Beispiel:

$$\text{Matrix } A_{4x3}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 9 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{Zeilenvektoren}$$
$$\text{Spaltenvektoren}$$

Hier einige besondere Matrizen:

Quadratische Matrix	Gleiche Anzahl Spalten und Zeilen	zB. A $_{3x3}$
Transponierte Matrix	Zeilen und Spalten werden vertauscht	$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$; $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$
Symmetrische Matrix	Diese Matrix muss quadratisch sein, an der Diagonale ist sie spiegelsymmetrisch	$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 5 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$
Treppenform der Matrix (siehe LGS mit mehr als 2 Unbekannten)	Mit der Treppenform kann man LGS lösen	
Einheitsmatrix	Alle Element auf der Diagonalen sind 1, sonst alles 0	$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Nullmatrix	alle Einträge sind 0	

Merksatz: Man **rechnet** mit Matrizen wie folgt

Addition und Subtraktion: Beide Matrizen müssen dieselbe Anzahl Spalten und Zeilen haben. Dann wird jeder Eintrag mit jedem addiert/ subtrahiert.	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Multiplikation mit einer Zahl:	$a\cdot A = a\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a & 5a\\ 6a & -3a\end{pmatrix}$
Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor. Hier bildet die jeweilige Zeile der Matrix das Skalarprodukt mit dem Vektor	$A\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ax+by+cz\\ dx+ey+fz\end{pmatrix}$
Multiplikation zweier Matrizen. Hier muss die Spaltenanzahl der einen gleich der Zeilenanzahl der anderen Matrix sein.	$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4a+2d & 4b+2e & 4c+2c\\ a+5d & b+5e & c+5f\end{pmatrix}$

Aufgabe: rechne!

$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ -1 & 3 & 0\end{pmatrix}=$	$\begin{pmatrix}-5 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\ -2\end{pmatrix}=$

B) Anwendungen

Merksatz: Man kann mit Matrizen **Prozesse beschreiben und berechnen**

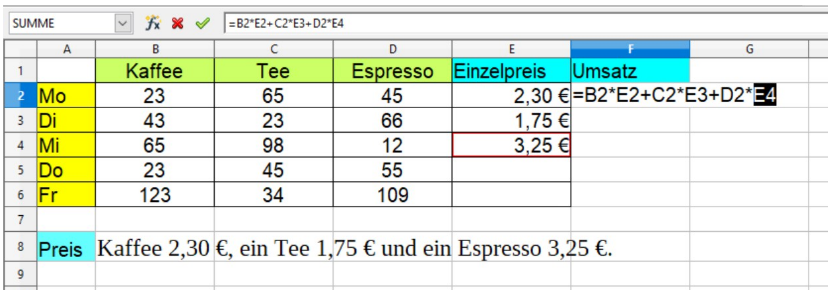
→ Tipp: Dazu eignet sich gut ein Kalkulationsprogramm wie z.B. Excel

Beispiel: Ein Automat verkauft von Montag bis Freitag 3 Sorten Getränke: Kaffee, Tee und Espresso. An folgenden Tagen wurden folgende Verkaufszahlen gezählt.

	Kaffee	Tee	Espresso
Mo	23	65	45
Di	43	23	66
Mi	65	98	12
Do	23	45	55
Fr	123	34	109

Dies sei die Matrix V

Nun kostet ein Kaffee 2,30 €, ein Tee 1,75 € und ein Espresso 3,25 €.
Wieviel Geld wurden in der Woche umgesetzt? Schreibe die Preise in einen Spaltenvektor p und **Multipliziere diesen mit der Matrix**. Das sieht in **Excel** so aus:


SUMME =B2*E2+C2*E3+D2*E4

	A	B	C	D	E	F	G
1		Kaffee	Tee	Espresso	Einzelpreis	Umsatz	
2	Mo	23	65	45	2,30 €	=B2*E2+C2*E3+D2*E4	
3	Di	43	23	66	1,75 €		
4	Mi	65	98	12	3,25 €		
5	Do	23	45	55			
6	Fr	123	34	109			
7							
8	Preis	Kaffee 2,30 €, ein Tee 1,75 € und ein Espresso 3,25 €.					
9							

Und dann ziehe die Informationen der Zelle nach unten und du hast den Wochenumsatz:

	Kaffee	Tee	Espresso	Einzelpreis	Umsatz
Mo	23	65	45	2,30 €	312,90 €
Di	43	23	66	1,75 €	150,00 €
Mi	65	98	12	3,25 €	211,25 €
Do	23	45	55		
Fr	123	34	109		

Preis Kaffee 2,30 €, ein Tee 1,75 € und ein Espresso 3,25 €.

→ Nun führen wir die Aufgabe weiter auf die **Multiplikation zweier Matrizen:**
Es gibt zwei Anbieter, die umgerechnet für die Produkte folgende Preise berechnen:
Anbieter A : Kaffee 0,9 € Tee 0,5 € und Espresso 1,2 €
Anbieter B : Kaffee 1,1 € Tee 0,35 € und Espresso 1 €
Welchen Anbieter sollte man wählen, wenn man den Wochenumsatz als Referenzgröße nimmt?
Nun sieht das Ganze so aus:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Kaffee	Tee	Espresso	Anbieter A	Anbieter B	Preis A	Preis B
2	Mo	23	65	45	0,90 €	1,10 €	=B2*E2+C2*D2:E4	
3	Di	43	23	66	0,50 €	0,35 €		
4	Mi	65	98	12	1,20 €	1,20 €		
5	Do	23	45	55		3Z x 2S		
6	Fr	123	34	109				
7								
8	**Anbieter A** : Kaffee 0,9 € Tee 0,5 € und Espresso 1,2 € **Anbieter B** : Kaffee 1,1 € Tee 0,35 € und Espresso 1 €.							
9								

Mache dasselbe für Preis B und ziehe die Zelle nach unten.

	Kaffee	Tee	Espresso	Anbieter A	Anbieter B	Preis A	Preis B
Mo	23	65	45	0,90 €	1,10 €	107,20 €	102,05 €
Di	43	23	66	0,50 €	0,35 €	129,40 €	55,35 €
Mi	65	98	12	1,20 €	1,20 €	121,90 €	105,80 €
Do	23	45	55			109,20 €	41,05 €
Fr	123	34	109			258,50 €	147,20 €

Anbieter A : Kaffee 0,9 € Tee 0,5 € und Espresso 1,2 €
Anbieter B : Kaffee 1,1 € Tee 0,35 € und Espresso 1 €.

Man sieht schnell, dass Anbieter B der preisgünstigere ist, wenn das Kaufverhalten weiterhin so verläuft wie in dieser Woche.
→ **Aufgabe**: Denke dir selber eine Aufgabe aus und erstelle eine Excel Tabelle damit.

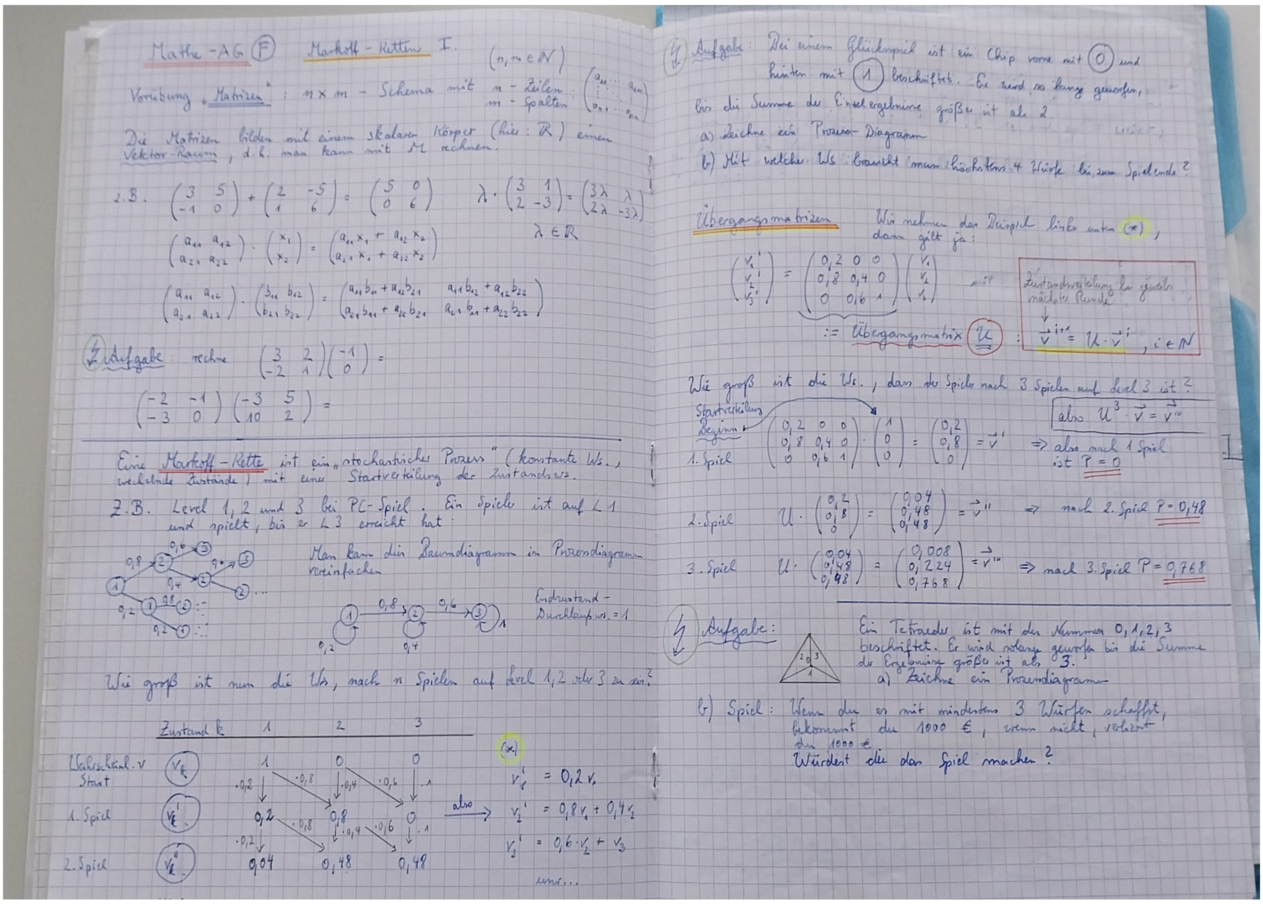
Merksatz: Man kann mit Matrizen **Abbildungen** rechnerisch beschreiben.

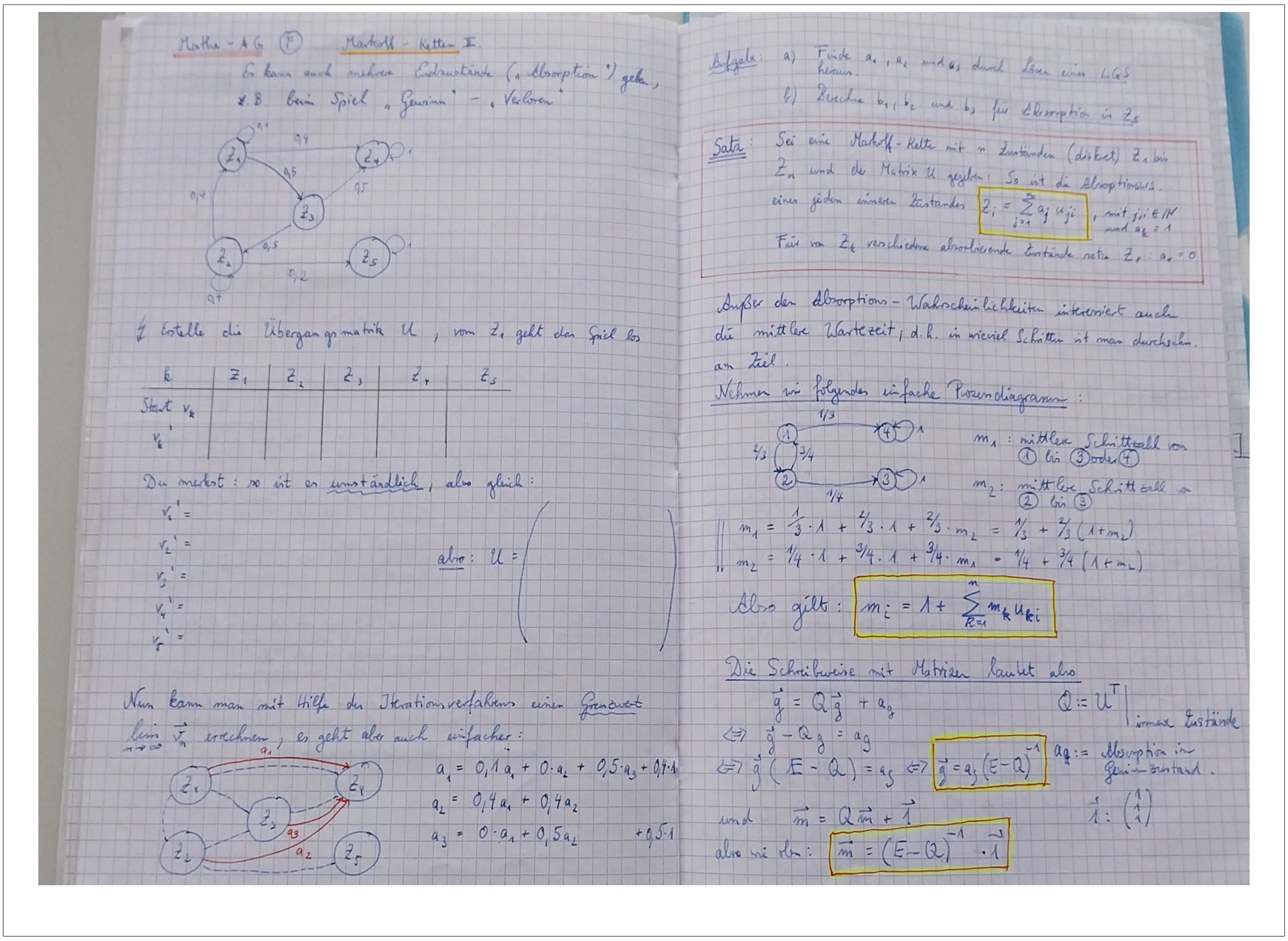
Spiegelung einer Figur an einer Geraden mit der Gleichung y = mx und m = tan(φ)	$\begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x` \\ y` \end{pmatrix}$	Beispiel: Spiegele den Punkt P (2/1) an der Geraden mit der Gleichung y = 1,5x → rechne arctan (1,5) = 88° und setze dann die Zahlen in die Matrix ein.

Drehung um den Ursprung mit dem Winkel φ	$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	Ein Beispiel für eine Drehung im $\mathbf{R}^3$ kann man auf meinem Youtube Kanal ansehen:
https://www.youtube.com/watch?v=SvJxe6IyNkE&t=487s		
Zentrische Streckung um den Faktor k	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$	

→ **Aufgabe**: Gegeben sei das Dreieck **ABC mit A (1/1) , B (3/2) und C (2/4)**.
a) Spiegle das Dreieck rechnerische an der Geraden y = 2x.
b) Drehe das Dreeick im Winkel von 35° um den Ursprung.
c) Strecke das Dreieck um den Faktor k = 1,5
d) Überprüfe die Rechnen mit Hilfe von **GeoGebra** oder ähnlichen Programmen.

Merksatz: Man kann mit Matrizen **stochastische Prozesse** mit Hilfe von Übergangsmatrizen beschreiben.
Ich habe dies vor einigen Jahren schon einmal aufgeschrieben und hoffe, dass man es gut lesen kann:





Mathe - AG (F) Markoff - Ketten II.

Es kann auch mehrere Endzustände („Absorption") geben, z.B. beim Spiel „Gewinn" - „Verloren"

Erstelle die Übergangsmatrix U, vom Z_1 geht das Spiel los

k	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
Start v_k					
v_k'					

Du merkst: so ist es umständlich, also gleich:

$v_1' =$

$v_2' =$

$v_3' =$

$v_4' =$

$v_5' =$

also: $U = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$

Nun kann man mit Hilfe des Iterationsverfahrens einen Grenzwert $\lim_{n \to \infty} \vec{v}_n$ errechnen, es geht aber auch einfacher:

$a_1 = 0{,}1\,a_1 + 0 \cdot a_2 + 0{,}5 \cdot a_3 + 0{,}4 \cdot 1$

$a_2 = 0{,}4\,a_1 + 0{,}4\,a_2$

$a_3 = 0 \cdot a_1 + 0{,}5\,a_2 \quad + 0{,}5 \cdot 1$

Aufgabe: a) Finde a_1, a_2 und a_3 durch Lösen eines LGS heraus.

b) Berechne b_1, b_2 und b_3 für Absorption in Z_5

Satz: Sei eine Markoff-Kette mit n Zuständen (diskret) Z_1 bis Z_n und die Matrix U gegeben: So ist die Absorptionsws. eines jeden inneren Zustandes $\boxed{Z_i = \sum_{j=1}^{n} a_j u_{ji}}$, mit $j, i \in \mathbb{N}$ und $a_k = 1$

Für von Z_k verschiedene absorbierende Zustände setze Z_r: $a_r = 0$

Außer den Absorptions-Wahrscheinlichkeiten interessiert auch die mittlere Wartezeit, d.h. in wieviel Schritten ist man durchschn. am Ziel.

Nehmen wir folgendes einfache Prozessdiagramm:

m_1: mittlere Schrittzahl von ① bis ③ oder ④

m_2: mittlere Schrittzahl von ② bis ③

$m_1 = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot m_2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1 + m_2)$

$m_2 = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot m_1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(1 + m_1)$

Also gilt: $\boxed{m_i = 1 + \sum_{k=1}^{n} m_k u_{ki}}$

Die Schreibweise mit Matrizen lautet also

$\vec{g} = Q\vec{g} + a_g \qquad Q := U^T \big|_{\text{innere Zustände}}$

$\Leftrightarrow \vec{g} - Q\vec{g} = a_g$

$\Leftrightarrow \vec{g}(E - Q) = a_g \Leftrightarrow \boxed{\vec{g} = a_g (E - Q)^{-1}} \qquad a_g :=$ Absorption im Gewinnzustand.

und $\vec{m} = Q\vec{m} + \vec{1} \qquad \vec{1} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

also wie oben: $\boxed{\vec{m} = (E - Q)^{-1} \cdot \vec{1}}$

Falls jemand etwas nicht lesen kann, bitte bei mir melden, aber ich meine, die Schrift ist sehr ordentlich.

→ **Aufgabe**: Paul spielt ein Comupterspiel mit den Leveln **L 1, L 2 und L 3.**

L 1 --- 0,8 ---> **L 2** --- 0,6 ---> **L 3**. Die Ws, auf Level 1 zu bleiben ist demnach 0,2 und ab Level 2 auf Level 2 zu bleiben 0,4.

a) Zeichne ein Prozess-Diagramm.

b) Berechne mit Hilfe einer Matrix und dem Excel Programm die Wahrscheinlichkeit, nach 3 Spielzügen auf Level 3 zu landen.

