Landesabitur Hessen 2023

Merksätze und Übungsaufgaben (nach dem hessischen Abiturerlass für 2023)
Zusammengestellt und bearbeitet von Bernd Schneider, PDR Kelkheim.

Q 2) Lineare Algebra und analytische Geometrie

Q 2.1 Lineare Gleichungssysteme (LGS) mit 3 Unbekannten, Vektoren

Merksatz: Ein LGS mit drei Unbekannten ist a) hinreichend bestimmt, wenn es drei Gleichungen und b) unterbestimmt, wenn es weniger als drei Gleichungen gibt.

Der Wert eines LGS ändert sich NICHT, wenn man
- die Reihenfolge von Zeilen vertauscht,
- eine Zeile mit einer von Null verschiedenen Zahl multipliziert oder dividiert,
- eine Zeile oder ein Vielfaches von ihr zu einer anderen Zeile addiert wird.

Z.B.:

$$\left| \begin{array}{l} 2x + y - z = 4 \\ x - 4y + 4z = 2 \\ 4x - y + 5z = 0 \end{array} \right|$$

Zum Lösen mit dem **Gauß-Verfahren** bringt man das LGS mit dem Additionsverfahren in die Treppenform. Beispiel:

$$\begin{pmatrix} x + & y - & 2z = 4 \\ & 2y + & z = 0{,}1 \\ & & 5z = 1 \end{pmatrix}$$

Damit ist z = 0,2 ; y = 0,05 und x = 4,35

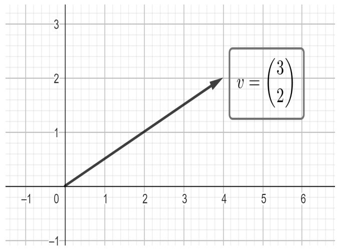
Übungsaufgaben:

1. Löse das LGS mit dem Gauß Verfahren	$\left\| \begin{array}{l} 3x + 2y + 5z = 8 \\ 6x + y + z = 7 \\ -3x + 2y + 5z = 2 \end{array} \right\|$
2. Aus dem **Landes - Abitur 2015**: Ein GPS Empfänger auf der Erde empfängt die Signale von Satellit NAVSTAR, der sich momentan an der Position N (0/10/20.303) und von Satellit KOSMOS, der sich an der Position K (4.309/2.801/20.513) befindet. Das Signal von NAVSTAR wird aus Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 25 \\ 37 \\ -1010 \end{pmatrix}$ das Signal von KOSMOS aus Richtung des Vektors $\vec{w} = \begin{pmatrix} -13 \\ -7 \\ -70 \end{pmatrix}$ empfangen. → **Zeige mit einem LGS**, dass sich der GPS Empfänger auf Position E (500/750/3) befindet.	

Merksatz: Ein geometrischer **Vektor** ist ist ein Pfeil, der zu einer bestimmten Länge („Betrag“ des Vektors) auch eine bestimmte Richtung hat. Ein **Skalar** ist demgegenüber eine ungerichtete Größe.

z.B.

$a \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ hierbei ist die Zahl a ein **Skalar**, die Klammer ein 2 - dimensionaler Vektor, der im Koordinatenursprung (0/0) seinen Anfang nimmt.



Man kann einen Vektor auch in Zeilen schreiben:
v = (x , y , z)

Rechnen mit Vektoren:

man addiert Vektoren, indem man jeden Eintrag addiert, z.B.	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$
man multipliziert Vektoren mit einem Skalar, indem man jeden Eintrag mit dem Skalar multipliziert.	$10 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x \\ 10y \end{pmatrix}$
Für die Multiplikation zweier Vektoren gibt es **2 Möglichkeiten:**	
A) Skalar – Multiplikation: d.h. das Ergebnis ist ein Skalar (also eine Zahl).	Es gibt 2 Möglichkeiten a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) = 5$ b) $\vec{a} \circ \vec{b} = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert \cdot \cos(\varphi)$ $\quad \varphi$ *ist der Winkel, den beide Vektoren einschließen* Der **Betrag** eines Vektors ist dessen **LÄNGE**: $Wenn\ \vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},\ dann\ ist\ \lvert a \rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
B Vektorprodukt d.h. das Ergebnis ist wieder ein Vektor.	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{pmatrix}$ Das Ergebnis eines Vektorproduktes ist ein sogenannter **Normalenvektor n:** er steht senkrecht auf der von beiden Vektoren aufgespannten Ebene.

Übungsaufgaben: Gegeben sind die beiden Vektoren a = (3 , 4, 1) und b = (– 1 , 2, 0).
Bilde von beiden Vektoren i) die Summe, ii) das Vektorprodukt.
Berechne dann iii) die Größe des Winkels, den beide Vektoren einschließen.

Merksatz: Vektoren nennt man **linear abhängig**, wenn ein Vektor das Vielfache eines anderen Vektors ist. Diese Vektoren sind zueinander **PARALLEL.**

z.B. $\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}$ *und* $\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$	sind linear abhängig, denn $\begin{pmatrix}2\\8\end{pmatrix}=(-2)\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\end{pmatrix}$

Um ein praktisches Verfahren kennenzulernen, mit dem wir die lineare Abhängigkeit prüfen können, führen wir bereits hier den Begriff der **MATRIX** ein.

Merksatz: Eine **Matrix ist eine Tabelle** mit einer bestimmten Anzahl von Spalten (senkrecht) und Zeilen (waagrecht).

Z.B. ist eine **2 x 3 Matrix** eine Tabelle mit 2 Zeilen und 3 Spalten.	$\begin{pmatrix}2&3&-1\\0&-7&9\end{pmatrix}$	Das ist eine Matrix mit Zahleneinträgen. Man kann in Matrizen auch bspw. auch Funktionen z.B. sin (φ) eintragen, aber davon unten mehr.

z.B. wir prüfen die lineare Unabhängigkeit von 3 Vektoren mit Hilfe von LGS in Matrixschreibweise.

Gegeben sind drei Vektoren: (1,0,0), (2,0,3) und (0,1,4)

Wir müssen also zeigen, dass $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = o$ ist mit $o = (0,0,0)$
und $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
Dann sind die Vektoren **linear unabhängig.**
Also schreiben wir die drei Vektoren als Spalten in eine Matrix $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&3&4\end{pmatrix}$

Durch Vertauschung der II. und III. Zeile (kein Problem, siehe oben) sieht man ohne Rechnung, dass $\lambda_3 = 0$ sein muss. Daraus folgt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, also linear unabhängig!

Eine andere Weise, die lineare Abhängigkeit zu prüfen, ist die Berechnung der **Determinante, man schreibt det(A)**

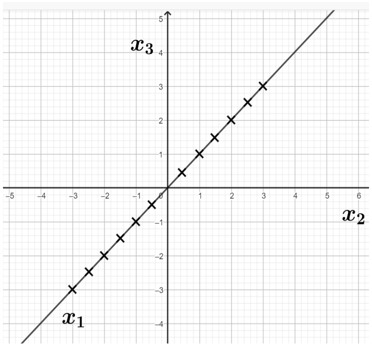
z.B. sind linear abhängig? $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}$ man schreibt das so $\left(\begin{matrix}2&1&0\\0&3&-2\\-1&-2&-3\end{matrix}\right)\begin{matrix}2&1\\0&3\\-1&-2\end{matrix}$

Gehe die Linien wie folgt von oben links angefangen durch
(„Jägerzaun - Regel“)
$2\cdot3\cdot(-3)+\ 1\cdot(-2)\cdot(-1)+0\cdot0\cdot(-2)\ -\ (-1)\cdot3\cdot0-(-2)\cdot(-2)\cdot2-(-3)\cdot0\cdot1 = \det(A)=(-24)$
Wenn det(A) = 0, sind die Vektoren linear abhängig, ansonsten nicht.

Übungsaufgabe: Prüfe, ob Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix}$ *und* $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$ linear abhängig sind.

Q 2.2. Orientieren und bewegen im Raum

Merksatz: Wir erweitern unser Koordinatensystem um eine weitere, 3. Dimension.
Wir zeichnen nun im Winkel von 45° eine weitere Koordinatenachse in das System:



Da hinein kann man nun mit Koordinatenangaben [z.B. P (1/3/4)] Körper, z.B. Quader einzeichnen.
Das übst du selber mit Hilfe von geeigneten Aufgaben, weil ich dieses Thema schrecklich finde.

Q 2.3. Punkte, Geraden und Ebenen

Merksatz: a) Darstellung einer **Geraden** in der **Ebene in Parameterform**

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \ ;\ z.B.:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \quad mit\ \mu \in R$$

Stützvektor Richtungsvektor

Bei einer **Geraden** im **Raum** kommt noch eine Koordinate dazu

z.B. eine Gerade in R^2 (also in der Ebene) geht durch die Punkte P (2/3) und Q (0/1).
Stelle die Geradengleichung in Parameterform auf.

$$\text{Der Stützvektor } sei\ \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad der\ Richtungsvektor\ \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$also:\ g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

b) Für **Ebenen** gibt es drei Darstellungsformen:
→ die **Koordinatenform**: ax + by + cz = d
→ die **Parameterform** (analog Geraden in R^3):

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} g \\ h \\ j \end{pmatrix} \ ;\ z.b.\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Stützvektor Spannvektoren

→ die **Normalenform** (der Normalenvektor n steht senkrecht auf den Spannvektoren):

$$E: \vec{x} = \left[\vec{x} - \vec{p}\right] \circ \vec{n} = 0 \ ; das\ Skalarprodukt = 0\ wegen\ \cos(90°) = 0$$

Übungsaufgabe: Eine Ebene ist festgelegt durch die Punkte A (2/0/1), B (3/1/2) und C (0/1/-2). Stelle die Ebenengleichung in **Parameterform** auf.

Merksatz: Oft ist es nötig, bei Ebenen von der einen Form in die andere Form umzuwandeln. Das geht so:

Parameterform → Normalenform - Bestimme den Normalenvektor, indem du das Vektorprodukt der beiden Spannvektoren berechnest

$\vec{x} = \vec{p} + \mu\vec{v} + \lambda\vec{w} \text{ in } \left[\vec{x} - \vec{p}\right] \circ \vec{n} = 0$

$$\vec{v} \; x \; \vec{w} = \vec{n}$$

Normalenform → Koordinatenform - Klammere aus: $\left[\vec{x} - \vec{p}\right] \circ \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} \circ \vec{n} - \vec{p} \circ \vec{n} = 0$

Dann hast du $n_1x + n_2y + n_3z - [\, n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3] = 0$

z.B. $3x + 2y - z - 12 = 0$, also $3x + 2y + z = 12$

Koordinatenform → Normalenform - Bestimme zuerst die Koordinaten des Stützvektors **p**
Mache es einfache und setze x = y = 0, berechne z

Wenn ax + by + cz = d ist, dann ist der Normalenvektor immer $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Mit **p** und **n** kannst du die Normalenform aufstellen.

Koordinatenform → Parameterform - Wenn ax + by + cz = d
So kannst du sofort drei Ebenenpunkte ausrechnen, indem du nacheinander x = y = 0, dann y = z = 0 und zuletzt x = z = 0 ausrechnest.
Mit den drei Punkten kannst du dann die Spannvektoren(durch Differenz) ausrechnen.

Übungsaufgaben: a) Rechne $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ in die Normalenform um.

b) Rechne $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ in die Koordinatenform um.

c) Rechne 3x – y + 2z = 10 in die Normalenform um.

d) Rechne x + y – 4z = 2 in die Parameterform um.

Q 2.3. Lage von Punkten, Geraden und Ebenen

Merksatz: Nun können wir auch **Beziehungen** von Geraden, Ebenen und Punkten herstellen.

a) Lage zweier Geraden.

z.B. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

→ Setze die beiden Geradengleichungen gleich.
→ Löse mit einem LGS nach den beiden Parametern λ und μ (s.o.) auf.
→ Man erhält λ = – 1 und μ = 1
→ Setze einen dieser Zahlen in g bzw. h ein und es ergibt sich ein Schnittpunkt S (6/-5/1).
Wenn es **keinen Schnittpunkt** gibt, so sind die Geraden entweder **parallel** oder **windschief**.
→ Sind sie parallel, so müssen die Richtungsvektoren **linear abhängig** sein.
Liegt der Aufpunkt von g auf der Geraden h (oder umgekehrt), so sind die Geraden **identisch**.

b) Lage von Gerade g und Ebene E
→ Es gibt drei Möglichkeiten: **i)** g **liegt in** E **ii)** g und E sind **parallel**
iii) g und E **schneiden** sich in einem Punkt S.

→ Ist E in **Parameterform** gegeben, so setzt man g = E und löst ein LGS.
→ Ist E in **Koordinatenform** gegeben, so setzt man x, y, z in E ein:
ax+by+cz=d, also $\mathbf{a(p_1+ru_1) + b(p_2+ru_2)+c(p_3+ru_3)=d}$
→ Ist der Normalenvektor von E bekannt, so kann man n und den Richtungsvektor der Geraden p multiplizieren. Ist $\vec{n} \circ \vec{p} = 0$, so liegt g entweder in E oder ist zu E parallel. Um dies zu prüfen, setzt man p in E ein.

c) Lage von zwei Ebenen E und F
→ Es gibt drei Möglichkeiten: **i)** F und E sind **identisch** **ii)** F und E sind **parallel**
iii) F und E **schneiden** sich in einer Geraden g.
Man kann mit den Normalenvektoren n_E und n_F schnell prüfen, was los ist:
Sind beide **linear abhängig**, so sind E und F entweder identisch oder parallel.
Sind beide **linear unabhängig**, so schneiden sich E und F in einer Geraden.

→ Sind E und F in **Parameterform** gegeben, so setze E = F und löse das LGS. Das LGS ist mit 3 Gleichungen und 4 Parametern **unterbestimmt**. Stelle daher zuletzt einen Parameter mit Hilfe eines anderen dar.
z.B. $\lambda = 2 + 0{,}5\mu$. Dies setzt man dann in die Ebenengleichung mit den beiden Parametern λ und μ ein und erhält so die Gleichung der **Schnittgeraden**.
→ Sind E und F in **Koordinatenform** gegeben*, so setzt man ebenfalls ein unterbestimmtes LGS mit 2 Gleichungen und 3 Variablen auf, setzt dann etwa $x_3 = t$ und stellt die Gleichung der Schnittgeraden auf.

z.B* **E**: 2x – 2y + 4z = 0 und **F:** x + 5y – z = 12

Prüfe zuerst, ob $n_1 = (2,-2,4)$ und $n_2 = (1,5,-1)$ linear unabhängig. JA! Also gibt es eine Schnittgerade.

→ Stelle jetzt ein **LGS** auf $\begin{vmatrix} 2x - 2y + 4z = 0 \\ x + 5y + z = 12 \end{vmatrix} \rightarrow y = -2 - 0{,}5z \;\; setze \; z = t$

$und \;\; du \;\; erhältst \;\; y = -2 - 0{,}5t$

Dann gilt x + 5(-2 – 0,5t) + 4t = 0
x – 10 – 2,5t + 4t = 0 und also x – 10 + 1,5t = 0 dann ist x = 10 – 1,5t

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - 1{,}5t \\ -2 - 0{,}5t \\ t \end{pmatrix} \rightarrow g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Übungsaufgaben: Stelle, falls möglich, die Gleichung der Schnittgeraden auf.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \;\; und \;\; F : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Merksatz: Zunächst einmal kann man den Abstand zweier Punkte im Raum mit dem Satz des Pythagoras berechnen: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

→ Das ist eine **wichtige Grundlage!**

Übungsaufgabe: Berechne den Abstand der Punkte P (2/3/1) und Q (0/-1/2).

i) Abstand Punkt – Ebene: → Man kann das machen mit der **Lotgeraden.**

z.B. Abstand **P (1/3/2)** zur Ebene **E : x + y +2z = 4** , hier ist der Normalenvektor n = (1/1/2).

Also lautet die Lotgerade g (g steht senkrecht auf E und geht durch den Punkt P): $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Nun setze für x,y,z die Zeilen der Lotgeraden ein:

(1 + r) + (3 + r) + 2(2 + 2r) = 4 So ist r = (– 1) und damit ist Lotfußpunkt F (0/2/0).

$d = \left|\overrightarrow{FP}\right|$ `rechne wie oben beschrieben!

→ Es geht auch mit der **Hesse`schen Normalenform:** $d(P;E) = \left|\vec{n_0} \circ (\vec{p} - \vec{a})\right| \; wobei \; \vec{n_0} = \frac{1}{\left|\vec{n}\right|} \cdot \vec{n}$

Z.B. P (2/1/0) und $E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ also $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}$

und so $d(P;E) = \left|\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cdot \frac{1}{\sqrt{21}} = 2,4$

Übungsaufgabe: Berechne den Abstand von P (2/3/0) von E: 2x – 8y + z = 5

ii) Abstand Punkt – Gerade: → Auch hier gibt es mehrere Möglichkeiten, zunächst mit der **Lotgeraden.**

z.B. eine Gerade ist gegeben mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \; und \; P(6/7/-3)$

So müssen die Koordinaten des Lotfußpunktes F (2 + 3s/ 1 /4 – 2s) sein, der senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden verlaufen muss: $\begin{pmatrix} -4+3s \\ -6 \\ 7 - 2s \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

Also: 3 (-4+3s)+(– 2)(7 – s) = 0 und damit s = 2 $So\,ist \left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = 7$

→ Eine weitere Möglichkeit ist die Konstruktion einer **Hilfsebene**, die mir aber gerade mein PC unerfreulicherweise gelöscht hat .

Übungsaufgabe: Berechne den Abstand des Punktes Q (2/ -3 /1) von der Geraden g, die durch die Punkte R (0/1/4) und S (-2 / 4/ 1) geht.

iii) Abstand windschiefer Geraden:

Durch die Tatsache, dass die Richtungsvektoren der beiden Geraden g und h senkrecht zu den gegebenen Punkten P und Q sein müssen, setzt man:

$\left|\overrightarrow{AB}\right| \circ \vec{u} = 0 \; und \; \left|\overrightarrow{AB}\right| \circ \vec{v} = 0 \; wobei\, \vec{u}\, und\, \vec{v}\, die\, Richtungvektoren\, von\, g\, und\, h.$ Löse dann das LGS