Landesabitur Hessen 2023

Merksätze und Übungsaufgaben (nach dem hessischen Abiturerlass für 2023)
Zusammengestellt und bearbeitet von Bernd Schneider, PDR Kelkheim.

Q3) Stochastik

Q 3.1 Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Merksatz: Um die Laplace – Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E zu berechnen, teile ich die Anzahl der Elemente der **Ereignismenge E** durch die Anzahl der Elemente in der **Ergebnismenge Ω**.

$$P(E) = \frac{Anzahl\,in\,E}{Anzahl\,in\,\Omega}$$

Z.B.: in einer Box befinden sich 3 blaue (b) , 2 rote (r) und 5 grüne (g) Kugeln. Es wird eine gezogen: wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es eine rote Kugel ist:
Ereignismenge E = {b,b,b,r,r,g,g,g,g,g}, also 10 Elemente
Ergebnismenge Ω = {r,r}, also 2 Elemente

P (r) = $\frac{2}{10}$ **= 0,2 = 20 %** **A:** Die Wahrscheinlichkeit beträgt 20%.

Die **Gegenwahrscheinlichkeit** berechnet man so: $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

z.B. wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass NICHT rot gezogen wird?
$P(\overline{r}) = 1 - 0,2 = 0,8 = 80\%$ **A:** Die Wahrscheinlichkeit beträgt 80%

Übungsaufgabe 1 : Der Stundenzeiger einer Uhr wird zufällig im Kreis gedreht.
i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger zwischen 3 und 6 Uhr steht?
ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zeiger NICHT zwischen 3 und 6 Uhr steht.

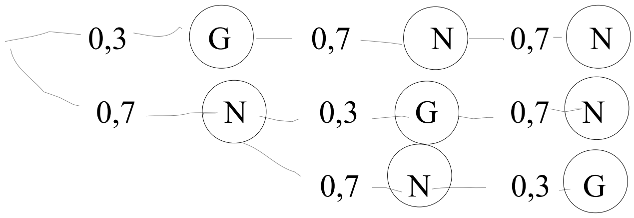
Merksatz: Werden Zufallsversuche mehrfach hintereinander ausgeführt, so kann man sich vorerst mit einem **Baumdiagramm** helfen.
Bevor du beginnst, stellst du **2 FRAGEN**:
a) Spielt die Reihenfolge eine Rolle? (Stichworte: zuerst …. dann)
b) Mit oder ohne Zurücklegen?

z.B. In einer Box sind 10 Zettel, drei sind Gewinne, 7 sind Nieten. Paul zieht 3 Zettel (mit Zurücklegen). Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
i) zuerst zwei Gewinne und dann eine Niete gezogen wird.
ii) zwei Nieten und ein Gewinn gezogen wird.

Berechne Wahrscheinlichkeit für Gewinn P(G)= 0,3 und für Niete P (N) = 0,7

i) — 0,3 G — 0,3 G — 0,7 N $0,3 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 0,069$ also ca. 7 %

ii) Hier spielt die Reihenfolge KEINE Rolle: es gibt also mehrere Möglichkeiten, 2 Nieten und einen Gewinn zu ziehen. Genau genommen **drei** Möglichkeiten.



$0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}147$
+
0,147
+
0,147
0,441 Es sind also 44,1 %

Regel: Entlang der Blätter man mal-rechnen muss
die Äste dagegen rechnest du Plus !

Q 3.2 Weiterführende Regeln: Stochastische Un-/ Abhängigkeit

Merksatz: Stochastische Abhängigkeit liegt vor, wenn ein Zufallsversuch von einem vorausgegangenen Zufallsversuch abhängig ist.
Einfaches Beispiel: Ziehen ohne Zurücklegen.
Wird bei der Aufgabe oben ein Gewinn gezogen und nicht zurückgelegt, so ändert sich die Wahrscheinlichkeit beim zweiten Zug von $\frac{3}{10}$ auf $\frac{2}{9}$, (nur noch 9 Zettel und 2 Gewinne)
Um das besser aufschreiben zu können, führt man folgende Symbole ein:
∩ bedeutet „und“, also P (G ∩ N) heißt: Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn und eine Niete.
U bedeutet „oder“, also P (N U G) heißt: entweder Niete oder Gewinn oder beides.
┐ bedeutet „nicht“ oder „kein“, also P (┐ G) heißt: Wahrscheinlichkeit, dass **kein** Gewinn kommt
$P_A(B)$ bedeutet: Das Ereignis B ist durch das Ereignis A bedingt, z.B. das Ziehen eines Gewinnes, **nachdem** zuvor ein Zettel ohne Zurücklegen gezogen wurde $P_A(B)= \frac{2}{9}$.

Stochastisch Unabhängig: P(A) · P(B) = P (A ∩ B) und damit $P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Stochastisch Abhängig: $P(B) \neq \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Man kann sich das gut an einer **Vierfelder - Tafel** klar machen:

	A	**┐A**	
B	**P (A ∩ B)**	**+P (┐ A ∩ B)**	**= P (B)**
┐B	**+ P (A ∩ ┐ B)**	**+ P (┐ A ∩ ┐ B)**	**= P (┐ B)**
	= P (A)	**= P (┐ A)**	**1**

Wenn $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \neq P(B)$ sind die Ereignisse **stochastisch abhängig, ansonsten nicht**.

z.B. Du hast eine Gruppe vor dir, die du auf Volljährigkeit und ihre Einstellung zum Sport befragen möchtest. Stelle dir vor, von 50 Menschen sind 20 volljährig (V) und 25 mögen Sport (S). Außerdem ist bekannt, dass 10 Menschen sowohl volljährig sind, als auch Sport mögen.
Sind die beiden Ereignisse Volljährigkeit V und positive Einstellung zum Sport S stochastisch unabhängig?
Ich notiere zunächst GELB die gegebenen Wahrscheinlichkeiten:

	V	**¬V**	
S	**0,2**	**0,3**	**0,5**
¬S	**0,2**	**0,3**	**0,5**
	0,4	**0,6**	**1**

Nun prüfe ich $P(S) = \frac{P(V \cap S)}{P(V)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5$ Das stimmt, also **UNABHÄNGIG.**

Übungsaufgabe 2: (Landesabitur 2016)
Bei der Überprüfung der Verpackungsmaschine stellt sich heraus, dass 2% der Brote nicht ordentlich verpackt waren. Die Warenausgangskontrolle lässt mit einer Wahrscheinlichkeit von 3% ein fehlerhaft verpacktes Brot passieren und sortiert mit einer Wahrscheinlichkeit von 4% ein ordentlich verpacktes Brot fälschlicherweise aus.
→ Stelle den Sachverhalt in einem Baumdiagramm **und** einer Vierfeldertafel dar.
→ Prüfe die Wahrscheinlichkeiten **P(nicht ordentlich verpackt) und P (passiert Kontrolle nicht)** auf stochastische Abhängigkeit.

Q 3.3. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Merksatz: Zunächst ist es wichtig, grundlegende Begriffe zu klären.

a) Erwartungswert: Der Erwartungswert einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist der **Mittelwert** einer Häufigkeitsverteilung.

Man berechnet ihn so: $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) \;\; mit\, i, n \in \mathrm{N}$

z.B.: Beim Würfeln mit der Augensumme von zwei unterscheidbaren Würfeln kann man mit folgender Wahrscheinlichkeit die Zahlen würfeln:

Augensumme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Anzahl Mögl.	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
P(X=x)	3%	6%	8%	11%	14%	17%	14%	11%	8%	6%	3%

So ist nun μ = 2*0,03 + 3*0,06 + …... + 12*0,03 = 7 (was zu erwarten war).

b) Standardabweichung
Die Standardabweichung gibt das **Maß für die Streuung** an, z.B. kann der Notendurchschnitt bei Klasse A und Klasse B eine 3 sein. Jedoch hat Klasse A viele Einser und Sechser und Klasse B hat überwiegend Dreier.
→ Man berechnet die **Standardabweichung σ** so:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)}$$

z.B. **Nehmen wir 2 Klassen mit Notendurchschnitt 3 und folgenden Notentabellen.**

Klasse A	1	2	3	4	5	6
Schüler	1	2	12	5	1	1
Schnitt 3	5%	9%	55%	23%	5%	5%

Klasse B	1	2	3	4	5	6
Schüler	10	0	1	1	2	8
Schnitt 3	45%	0%	5%	5%	9%	36%

Berechne den Erwartungswert (mit welcher Note man am ehesten rechnen kann, wenn man einen Schüler zufällig auswählt) $\boldsymbol{\mu_A = 3{,}27}$ **und** $\boldsymbol{\mu_B = 3{,}41}$

Damit kann nun $\boldsymbol{\sigma_A = 1{,}0}$ **und** $\boldsymbol{\sigma_B = 2{,}3}$ ausrechnen, eine enorme Abweichung bei sechs Noten.

Q 3.3. Wahrscheinlichkeitsverteilungen: Bernoulli Experiment und Binomialverteilung

Merksatz: Wenn ein Zufallsexperiment nur zwei Ergebnisse (z.B. Gewinn / Niete) hat, nennt man es auch **Bernoulli – Experiment**. Die beiden Wahrscheinlichkeiten sind dann
p und (1 – p).
Dabei besteht eine „Bernoulli – Kette“ aus **n Wiederholungen**, wobei die Zufallsvariable X die Anzahl der Treffer k angibt. Man schreibt dann **P (X =k), P (X ≤ k)** oder **P (X ≥ k)**.

Exkurs „Kombinatorik“:

→ Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Personen auf 5 Stühle an einen Tisch zu setzen?
5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 120 Möglichkeiten, man schreibt abgekürzt **5! = 120** (lies: „Fünf Fakultät“)

→ Wie viele Möglichkeiten gibt es, bei einem 4 – stelligen Zahlenschloss die Ziffern von 0 – 9 einzustellen?
10 · 10 · 10 · 10 = 10.000 Möglichkeiten, man schreibt $\mathbf{10^4}$

→ Wie viele Möglichkeiten gibt es 2 Treffer und 3 Nieten auf 5 Plätzen eines Baumdiagramms anzuordnen? $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ $lies: n \ \ über \ \ k$ Man nennt $\binom{n}{k}$ den **Bionominalkoeffizienten**

Genau das brauchen wir bei einer Bernoulli – Kette: Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, bei n Wiederholungen des Zufallsexperiments genau k Treffer
zu landen. Der Binomialkoeffizient gibt also die **Anzahl der „Äste“ beim Baumdiagramm** an.

Merksatz: Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Kette mit n Wiederholungen genau k Treffer mit der Wahrscheinlichkeit p erzielt werden, ist demnach: $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Man kann auch kurz $\mathbf{B_{n\,;\,p}(k)}$ schreiben.

Der **Erwartungswert** berechnet sich so: $\mu = n \cdot p$
Die **Standardabweichung**: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

→ Wird die Wahrscheinlichkeit für eine Trefferzahl „mindestens/ höchsten“ gefordert, spricht man von **kumulierten Wahrscheinlichkeiten** $\mathbf{F_{n\,;\,p}(k)}$
Man berechnet sie so:

$$P(X \geq k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i} \ \ bzw. \ P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

Übungsaufgabe 1. In einer Box befinden sich 90 Lose, davon sind 23 Gewinne und der Rest Nieten.
Udo zieht 10 Lose (mit Zurücklegen).
a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass davon genau 4 Gewinne sind.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass darunter mindestens 1 Gewinne ist.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass darunter höchstens 5 Gewinne sind.

2. **Ein Glücksrad hat 90° der Fläche blau, den Rest der Fläche rot.**
Wie oft muss man mindestens drehen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens einmal blau gedreht wird?

Q 3.3. Signifikanztests, Alpha- und Beta – Fehler

Merksatz: Bei der Durchführung von Signifikanz - Tests brauchst du
i) eine **Nullhypothese H_0: $p = p_0$** und eine **Alternativhypothese H_1: $p > p_0$ oder $p < p_0$**
z.B. i) Aufgabenstellung

rechtsseitig	linksseitig
Der Hersteller von Überraschungseiern behauptet, dass in höchstens 10% der Eier Fußballbilder sind. $H_0 : p \leq 0{,}1$ $H_1 : p > 0{,}1$	Bei einer Umfrage gaben 60% der Schüler an, Mathematik sei ihr Lieblingsfach. Bei einer erneuten Umfrage gaben von 200 Schülern aber nur 113 an, Mathematik sei ihr Lieblingsfach. $H_0 : p \geq 0{,}6$ $H_1 : p < 0{,}6$

ii) Ein **Signifikanz – Niveau α,** hier sei α = 5% (kann aber auch anderer Wert sein). Dass α = 5% bedeutet, dass die Irrtumswahrscheinlichkeit für Annahme H_0 nicht über 5% liegen darf.

rechtsseitig	linksseitig
Es werden zufällig 100 Eier ausgewählt. In 16 Eiern sind Fußballbilder. n = 100 , α = 5% Nun sucht man in einer entsprechenden Tabelle [$F_{100\,;\,0,1}$ **(k)]** die kleinste Zahl k, für die gilt: $P(X \leq k) < 0{,}95$ und landen bei k = 14 Suche dir in der Formelsammlung die Tabelle und sieht selber nach)	Hier ist n = 100 und $p \geq 0{,}6$ Suche also die kleinste Zahl k für die gilt: $P(X \geq k) > 0{,}05$ in der Tabelle [$F_{200\,;\,0,6}$ **(k)].** Diese Zahl heißt k = 109

iii) Formuliere nun den **Aufnahme – und Ablehnungsbereich**:

rechtsseitig	linksseitig
Aufnahmebereich = [0 ; 14] Ablehnungsbereich = [15 ; 100]	Aufnahmebereich = [109 ; 200] Ablehnungsbereich = [0 ; 108]

iv) **Beantworte** die Frage:

Die Behauptung des Herstellers stimmt bei einem Signifikanz – Niveau von 5% **nicht**.	Auch wenn der Wert unterhalb von 60% liegt, kann der Mathematik Lehrer **weiterhin** behaupten, dass 60% sein Fach mögen.

beidseitiger Signifikanztest

Hier ist eine Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis vorgegeben und es wird geprüft, ob es rechts- oder linksseitig eine **Irrtumswahrscheinlichkeit in Höhe des Signifikanz – Niveaus** gibt.

z.B. Beim Glücksrad (→ Aufgabe 2 auf Seite 5) müsste die Farbe blau mit $p = 25\%$ erscheinen.

i) **Hypothese** aufstellen:

Nullhypothese $\mathbf{H_0 : p = 0{,}25}$ Alternativ – Hypothese $\mathbf{H_1 : p \neq 0{,}25}$; $\boldsymbol{\alpha = 5\%}$

ii) **Stichprobenumfang n** wählen

Es wird das Rad $\mathbf{n = 200}$ mal gedreht.

iii) ermittle den **Annahmebereich**

Suche nun die kleinsten Zahlen k_1 und k_2 für die gilt $P(X \leq k_1) > 0{,}05$
und $P(X \leq k_2) > 0{,}95$

Suche dir in der Formelsammlung wieder die richtigen Tabellen (wichtig: **kumulierte Ws.**).

$k_1 = 37$ und $k_2 = 60$

Somit lautet der Annahmebereich: [37 ; 59]

Dreht das Rad bei 200 Versuchen weniger als 37 mal oder mehr als 59 mal in das blaue Feld, so ist das Glücksrad nicht OK.

Q 3.3. Alpha- und Beta – Fehler

Merksatz: Es gibt zwei Arten von **Fehlern bei Signifikanz – Tests**

i) Alpha Fehler (oder Fehler 1. Art)

D.h. H_0 ist richtig und wird trotzdem abgelehnt.

z.B. bei $H_0 = 0{,}4$ und $n = 100$ in binomialverteilter Zufallsgröße bei $\alpha = 5\%$

Rechtsseitiger Test.

Hier ist der Aufnahmebereich: [0 ; 48]

Hier ist der Ablehnungsbereich: [49 ; 100]

Also $\mathbf{P(X > 48) = 0{,}042}$ **also 4,2 %** ist die Wahrscheinlichkeit, die These fälschlicherweise abzulehnen.

ii) Beta Fehler (oder Fehler 2. Art)

D.h. H_0 ist falsch und wird trotzdem als richtig angenommen.

z.B. nehmen wir unser Beispiel von oben Seite 5:

Der Hersteller von Überraschungseiern behauptet, dass in höchstens 10% der Eier Fußballbilder sind. $H_0 : p \leq 0{,}1$

Es werden zufällig 100 Eier ausgewählt.

$n = 100$, $\alpha = 5\%$

Aufnahmebereich = [0 ; 14]

Ablehnungsbereich = [15 ; 100]

→ Nun brauchen wir, weil ja H_0 falsch ist, eine tatsächliche Wahrscheinlichkeit p*,
sei hier $\mathbf{p^* = 0{,}12}$